

基于鸽群优化算法的多无人机局部航迹重规划

徐文钰, 敖海跃, 刘燕斌
(南京航空航天大学航天学院, 南京 211106)

摘要: 为解决多无人机协同任务环境下需要面对的航迹重规划问题, 针对传统避障方法以及现有常规智能避障算法的局限性, 提出融合鸽群优化算法与人工势场法的局部航迹规划方法。该算法克服人工势场法规划的航迹容易陷入局部最优陷阱和使用常规智能避障算法会使时间成本增加的问题, 利用鸽群优化算法寻找最优预测距离, 可在突发威胁环境下为多无人机规划避开威胁区到达目标点的可行航迹。仿真实验结果表明, 该算法能在满足约束的条件下, 实现多无人机在面对突发威胁时航迹的动态调整, 且时间成本较小。

关键词: 航迹规划; 局部路径规划; 鸽群优化算法; 人工势场法

中图分类号: V279 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-1300(2022)01-0046-07

DOI: 10.16358/j.issn.1009-1300.20220503

Local path re-planning of multi-UAVs based on pigeon-inspired optimization

Xu Wenyu, Ao Haiyue, Liu Yanbin
(College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

Abstract: In order to solve the path re-planning problem that needs to be faced in the cooperative mission environment of multiple UAVs, a local path planning method that integrates pigeon-inspired optimization and the artificial potential field method is proposed to address the limitations of traditional obstacle avoidance methods and existing conventional intelligent obstacle avoidance algorithms. The algorithm overcomes the problems that the path planned by the artificial potential field method is easy to fall into the local optimal trap and the conventional intelligent obstacle avoidance algorithm increases the time cost, and uses pigeon-inspired optimization to find the optimal prediction distance, which can plan a feasible path for multiple UAVs to avoid the threat area and reach the target point under the sudden threat environment. Simulation experimental results show that the algorithm can achieve dynamic adjustment of multiple UAVs' paths in the face of emergent threats with less time cost, while satisfying the constraints.

Key words: path planning; local path planning; pigeon-inspired optimization; artificial potential field

收稿日期: 2021-09-20; 修回日期: 2021-10-31

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金 (NS2021061)

作者简介: 徐文钰, 硕士研究生, 主要研究方向为多飞行器航迹规划。

通讯作者: 刘燕斌, 博士, 副教授, 主要研究方向为空天飞行器多学科优化及控制。

引用格式: 徐文钰, 敖海跃, 刘燕斌. 基于鸽群优化算法的多无人机局部航迹重规划[J]. 战术导弹技术, 2022 (1): 51-57. (Xu Wenyu, Ao Haiyue, Liu Yanbin. Local path re-planning of multi-UAVs based on pigeon-inspired optimization [J]. Tactical Missile Technology, 2022 (1): 51-57.)

1 引言

航迹规划作为无人机任务规划中的关键部分,决定着无人机是否能够实现高效作战、完成精准打击。航迹规划就是依照相应的评价准则,为无人机在有障碍物存在的环境中找到一条能够从起始点无碰撞到达目标点的可行飞行路径。目前,常用到的航迹规划方法主要有人工势场法^[1]、栅格法^[2]、A*算法^[3]和可视图法^[4]等。

人工势场法的基本思想是在飞行器的局部环境中构建人工势场,目标点对飞行器产生引力,障碍物对飞行器产生斥力,两种力的矢量叠加构成作用在飞行器上的合力,利用合力引导飞行器的运动。人工势场法由于其结构简单、计算量小、实时性好的优点,目前被广泛应用于动态路径规划领域^[5-6],但是传统人工势场法存在局部最优点和目标不可达等问题。自从人工势场法问世以后,针对局部最优点的问题,国内外有许多专家学者做了大量的研究,形成两种主要的改进思路,一种是改进人工势场函数,以使得局部最优点出现的概率减小,例如引入速度、加速度等影响因子;第二种思路是将其与别的算法融合,比如融合粒子群算法、遗传算法等^[7-8]。文献[7]结合边缘检测法,引入了沿边走策略,快速逃离局部最优点。文献[9]引入虚拟障碍物来帮助飞行器逃离局部最优点。文献[10]利用速度方向前方的有效障碍物信息对传统人工势场法进行修正,解决了局部最优点的死锁问题。文献[11]引入预测距离,使飞行器在陷入局部最优点之前做出反应。

为克服传统避障方法的弊端,出现了多种智能优化方法,其中各种仿生优化方法尤为引人注目,如利用蚁群算法^[12]、鸽群优化算法^[13-14]等进行避障。然而,智能算法同样有着一定的局限性,如仿生优化算法存在不具备严密的数学性、在随机搜索过程中有着许多不确定因素、缺少理论支持等不足,这使得算法的适用范围比较有限^[15]。

本文提出一种融合人工势场法与鸽群优化算法的局部动态航迹规划方法,该算法使用带有预测距离的虚拟目标点法,利用鸽群优化算法对预

测距离进行优化,从而提高多无人机在面对复杂威胁区时的局部航迹规划性能。

2 突发威胁环境下的航迹重规划模型

无人机的工作环境通常都较为复杂,具有较多不确定的突发状况,这使得无人机几乎无法提前获知全部的环境信息,有些威胁仅在无人机抵达其附近区域后才能发现,这时就需要无人机具备局部航迹重规划的能力。进行局部航迹重规划前需要首先解决两个问题,一是确定何时开始进行局部重规划,二是确定局部重规划的起点和终点。这里给出触发重规划需要满足两个条件:

- (1) 无人机通过机载传感器探知到新的威胁;
- (2) 无人机继续按照离线初始路径飞行将进入威胁区。

明确了何时开始进行局部重规划后,就要确定局部重规划的起点和终点。动态规划目前主要有两种起终点选择方式,一种是以探知到突发威胁的点为起点,避开威胁区之后回到离线初始路径上,继续沿离线初始路径前进;另一种是以探知到突发威胁的点为起点,以目标点为终点重新规划一条路径,本文中采用第一种方式设置起点和终点。

如图1所示,本文研究内容为无人机在突发威胁环境下的局部航迹重规划。无人机从起始点朝向目标点飞行途中,在离线航迹上有突发威胁出现,影响无人机正常飞行,此时就要对该条离线航迹进行局部重规划,如图1中点划线所示,其中 R_{sensor} 为无人机自带传感器的最大探测半径。

2.1 环境模型

Voronoi图是根据环境中的威胁信息,取所有威胁区的中心,依次生成威胁区中心的中垂线,得到Voronoi边。由于Voronoi边上的点到相邻的两个威胁区中心的距离相等,所以无人机沿着Voronoi边飞行受到两个相邻威胁区的威胁最小,安全系数较高。在无人机飞行高度不变时,问题可以看作是二维的多无人机路径规划。环境建模的Voronoi图如图2所示。

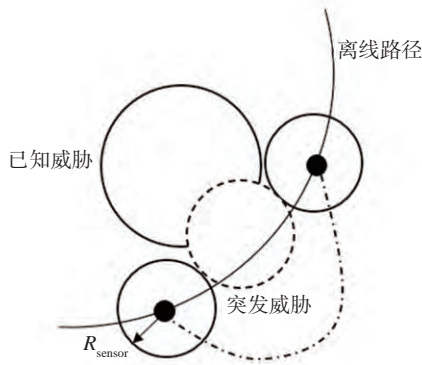


图1 航迹重规划示意图

Fig. 1 Schematic diagram of path re-planning

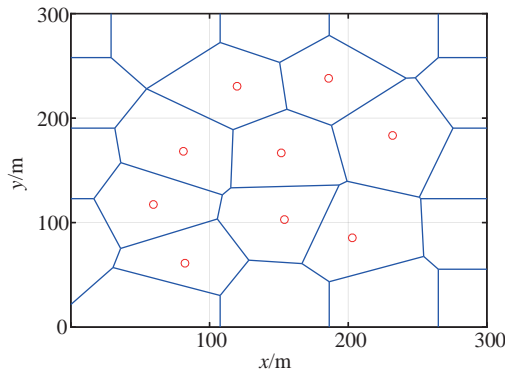


图2 环境建模的Voronoi图

Fig. 2 Voronoi diagram of environment modeling

2.2 航迹代价指标

2.2.1 航迹距离代价

航迹距离代价函数的作用是尽量缩短飞行距离, 得到最短飞行路径, 可定义为:

$$J_L = \sum_{j=1}^{n_{UAV}} \sum_{i=1}^n l_i \quad (1)$$

式中, l_i 为第 i 段飞行航迹的距离, 有:

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1}^j - x_i^j)^2 + (y_{i+1}^j - y_i^j)^2} \quad (2)$$

式中, n_{UAV} 为无人机个数, i 为第 i 个航路点, (x_{i+1}^j, y_{i+1}^j) 、 (x_i^j, y_i^j) 分别表示第 j 架无人机的两个相邻航路点的坐标。

2.2.2 航迹机动代价

使用无人机的转向角来衡量轨迹的平滑性, 如图3所示为航迹中某点转向角的示意图。无人机轨迹中由转弯所产生的机动代价可表示为:

$$J_A = \sum_{j=1}^{n_{UAV}} \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i^j \quad (3)$$

式中, φ_i^j 为第 j 架无人机的第 i 个航路点处的转向角。

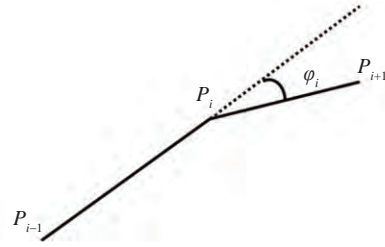


图3 转向角示意图

Fig. 3 Schematic diagram of steering angle

2.3 航迹约束条件

2.3.1 最大航程约束

无人机在飞行过程中受挂载油箱燃料或电池容量限制, 规划出航迹的航程需小于最大航程。设最大航程为 L_{max} , 此约束的数学模型如式(4)所示:

$$\sum_{i=1}^n l_i \leq L_{max} \quad (4)$$

式中, l_i 表示第 i 段航迹的长度, n 表示航迹段数量。

2.3.2 最小航迹段约束

无人机在飞行过程中从一个姿态转变为另一个时, 必须飞行的最小距离称为最小直线航迹距离。设受无人机性能及通信延迟限制, 最小航迹段距离为 l_{min} , 则航迹中任意直线航迹的距离满足如式(5)所示的条件:

$$l_i \geq l_{min} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

3 鸽群优化算法

鸽群优化算法是国内学者受家鸽自主归巢行为的启发而提出的优化算法, 它主要借助地图罗盘算子与地标算子实现对鸽群位置与速度的更新。

在鸽群优化算法中, 第 i 只鸽子的位置 X_i 、速度 V_i 采用如式(6)和(7)表示:

$$X_i = [X_i(1) \ X_i(2) \ \dots \ X_i(n)] \quad (6)$$

$$V_i = [V_i(1) \ V_i(2) \ \dots \ V_i(n)] \quad (7)$$

算法前期使用地图罗盘算子迭代更新, 设

第*i*只鸽子在第*t*次迭代中其位置为 $X_i(t)$, 速度为 $V_i(t)$, 最优鸽子的位置为 X_g , 速度为 V_g 。

$$V_i(t) = V_i(t-1) \cdot \exp(-Rt) + \text{rand} \cdot (X_g - X_i(t-1)) \quad (8)$$

$$X_i(t) = X_i(t-1) + V_i(t) \quad (9)$$

式中, R 为地图罗盘算子, rand 为 $[0, 1]$ 间的随机数。

算法后期使用地标算子迭代更新, 每一次更新后, 需要将所有鸽子按照适应度值的大小进行排序。设第*i*只鸽子在第*t*次迭代中的位置为 $X_i(t)$, 鸽群中心位置为 $X_c(t)$ 。

$$N_p(t) = \frac{N_p(t-1)}{2} \quad (10)$$

$$X_c = \frac{\sum X_i(t) \cdot f(X_i(t))}{N_p \cdot \sum f(X_i(t))} \quad (11)$$

$$X_i(t) = X_i(t-1) + \text{rand} \cdot (X_c - X_i(t-1)) \quad (12)$$

式中, $N_p(t)$ 为第*t*次迭代后鸽子数量, f 为适应度函数。

4 局部动态航迹规划方法

4.1 传统人工势场法

人工势场法最早由Khatib在20世纪80年代提出^[17], 这种方法假设无人机在一种虚拟势场下运动, 这种虚拟势场被称为人工势场。人工势场包括引力场和斥力场, 其中目标点对无人机产生引力, 引导无人机朝向其运动, 威胁对无人机产生斥力, 避免无人机与之发生碰撞。无人机在其路径上每一点所受的合力都等于这一点所有斥力与引力的和。因此, 人工势场定义为:

$$U(X) = U_{\text{att}}(X) + U_{\text{rep}}(X) \quad (13)$$

式中, U_{att} 为引力场, U_{rep} 为斥力场。引力和斥力被定义为引力场和斥力场的负梯度, 可知无人机在人工势场中所受的合力为:

$$F = F_{\text{att}} + F_{\text{rep}} \quad (14)$$

式中, F_{att} 为目标点对无人机产生的引力, F_{rep} 为威胁对无人机产生的斥力, 无人机所受合力如图4所示。

在无人机飞行高度保持不变的情况下, 可将

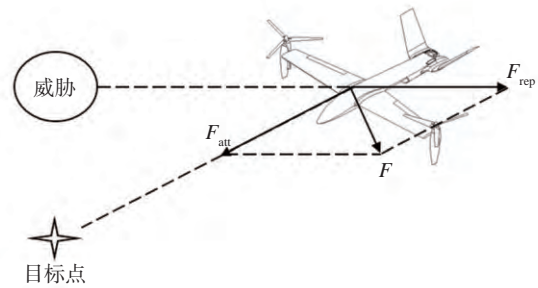


图4 人工势场法示意图

Fig. 4 Schematic diagram of artificial potential field

问题简化为二维的路径规划问题, 设无人机的坐标为 $X = (x, y)^T$, 目标点坐标为 $X_t = (x_t, y_t)^T$, 引力场函数和斥力场函数计算公式为:

$$U_{\text{att}}(X) = \frac{1}{2} k_a \|X - X_t\|^2 \quad (15)$$

$$U_{\text{rep}}(X) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_r \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} \right)^2 \|X - X_t\|^2, & d \leq d_0 \\ 0, & d > d_0 \end{cases} \quad (16)$$

式中, U_{att} 为目标点对无人机的引力场, U_{rep} 为威胁对无人机的斥力场, k_a 为引力增益系数, k_r 为斥力增益系数, 为无人机在空间位置与威胁的最短距离, d_0 为单个威胁影响的最大距离范围, 只有在无人机与威胁的距离小于 d_0 时, 威胁才对无人机产生影响。引力和斥力分别为引力场函数和斥力场函数的负梯度:

$$F_{\text{att}} = -\text{grad}(U_{\text{att}}) = -k_a \|X - X_t\| \quad (17)$$

$$F_{\text{rep}} = -\text{grad}(U_{\text{rep}}) = \begin{cases} F_{\text{rep}1} + F_{\text{rep}2}, & d \leq d_0 \\ 0, & d > d_0 \end{cases} \quad (18)$$

4.2 带预测距离的虚拟目标点法

针对无人机的飞行方向前方存在的复杂威胁区, 引入参数预测距离 r_p , 首先找出距离当前位置与目标点连线所在直线最近的威胁区, 将其作为中心威胁区, 并计算无人机当前位置到中心威胁区的距离 d_x 。然后判断 d_x 和 r_p 的大小, 如果 $d_x > r_p$, 则无人机按照传统人工势场法向目标点移动; 如果 $d_x \leq r_p$, 则将飞行方向所在直线朝威胁区个数较少的方向每次旋转一个较小的角度, 并且判断所有威胁区到旋转后的直线的距离是否大于安全距离 r_s , 如果大于 r_s , 则停止旋转, 以当前位置为端点, 以当前直线为方向, 以 d_x 为半径, 作一

线段，线段的另一端点就是虚拟目标点的位置。之后沿当前直线继续前进，直到达到虚拟目标点，跳出局部最优陷阱。

预测距离 r_p 的选择决定着虚拟目标点法的成败及所规划出航迹的性能。预测距离选择过小，会使得无人机先进入凹形威胁区内，然后再逃出，这会使得规划出的航迹不够平滑，导致机动代价增大，甚至存在规划失败的可能；预测距离选择过大，则会使得无人机过早使用虚拟目标点法进行规划，这会导致航迹距离代价过大。图 5 为带预测距离的虚拟目标点法的示意图。

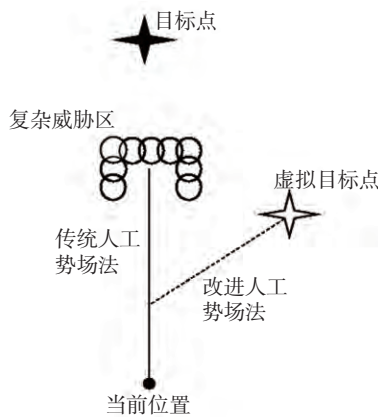


图 5 带预测距离的虚拟目标点法示意图

Fig. 5 Schematic diagram of virtual target method with prediction distance

4.3 基于鸽群优化算法的局部动态航迹规划

无人机按照预先装载的离线规划航迹飞行，在飞行过程中利用传感器感测环境中的障碍物，在无人机感知到可能使其陷入局部最优的复杂威胁区后，首先使用鸽群优化算法对预测距离的选择进行优化，然后再执行虚拟目标点法，以此来帮助无人机避开威胁区陷阱。

使用鸽群优化算法对预测距离 r_p 进行优化时适应度值的计算方法如下：

当满足约束条件时，

$$J_{\text{length}} = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (19)$$

$$J_{\text{turn}} = \arccos \frac{\overline{XO} \cdot \overline{XU}}{|\overline{XO}| \cdot |\overline{XU}|} \quad (20)$$

$$\text{fitness} = k \cdot J_{\text{length}} + (1 - k) \cdot J_{\text{turn}} \quad (21)$$

当不满足约束条件时，

$$\text{fitness} = +\infty \quad (22)$$

式中， (x, y) 为当前点的坐标， (x_i, y_i) 为威胁区 i 的圆心坐标， J_{length} 为虚拟目标点法产生的路径长度代价， \overline{XO} 为从当前点指向威胁区 i 的向量， \overline{XU} 为从当前点指向虚拟目标点的向量， J_{turn} 为虚拟目标点法产生的转向角代价， k 为权重系数， J 为虚拟目标点法产生的总代价。

下面将给出基于鸽群优化算法的局部动态航迹规划算法工作的具体流程图，如图 6 所示。

基于鸽群优化算法的局部动态路径规划算法具体实施步骤如下：

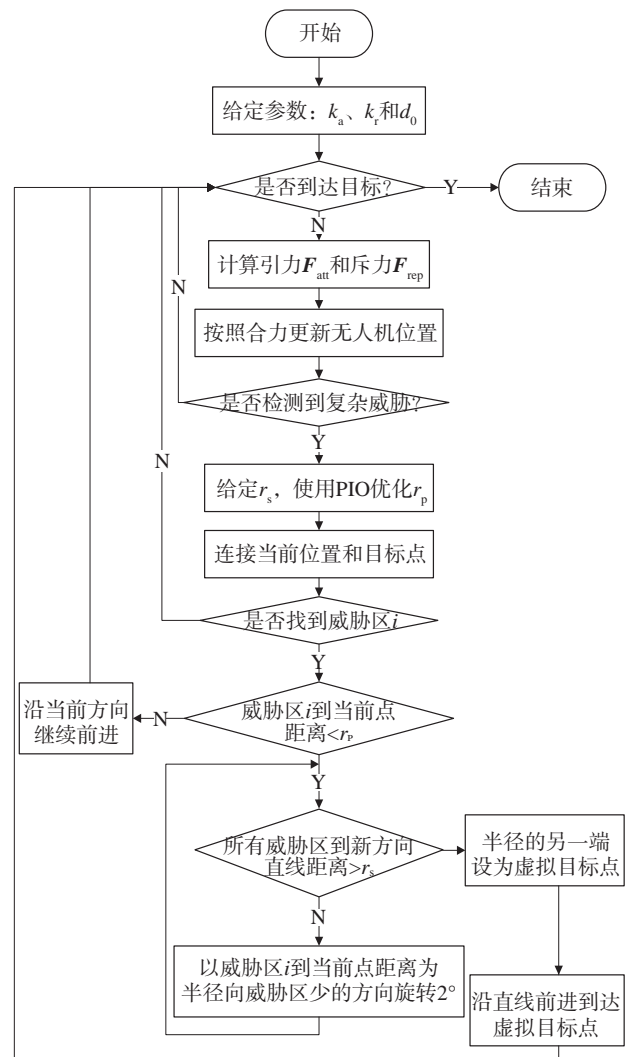


图 6 基于鸽群优化算法的局部动态路径规划算法流程图

Fig. 6 The flowchart of the PIO-based local dynamic path planning algorithm

步骤 1: 给定人工势场法的相关参数: 引力增益系数 k_a 、斥力增益系数 k_r 和单个威胁影响的最大距离范围 d_0 ;

步骤 2: 判断无人机是否到达目标点, 若是则结束, 否则进行步骤 3;

步骤 3: 计算引力 F_{att} 和斥力 F_{rep} , 并向合力方向前进一个步长;

步骤 4: 判断是否检测到复杂威胁区, 是则进行步骤 5, 否则进行步骤 2;

步骤 5: 给定 r_s , 初始化鸽群优化算法的参数, 如地图罗盘算子 R 、种群数量 N_p 、最大迭代次数 $NC1_{max}$ 、 $NC2_{max}$, 确定适应度函数, 随机初始化鸽群的位置与速度。执行步骤 6;

步骤 6: 根据给定的 r_s , 启动地图罗盘算子, 迭代更新至 $NC1_{max}$, 根据适应度值的大小确定 X_p 及 X_g ;

步骤 7: 根据适应度值淘汰 20% 的鸽子, 启动地标算子, 迭代更新至 $NC2_{max}$, 得到 r_p ;

步骤 8: 连接当前位置和目标点, 判断是否能找到威胁区 i , 是则继续, 否则进行步骤 2;

步骤 9: 判断当前点到威胁区 i 的距离 d_x 和预测距离 r_p 的大小, 如果 $d_x > r_p$, 则沿着当前方向继续前进并进行步骤 2;

步骤 10: 以当前点到威胁区 i 的距离 d_x 为半径, 向威胁区少的一侧旋转 2° ;

步骤 11: 判断当前方向所在直线是否与威胁区相交, 是则进行步骤 10, 否则以半径 d_x 的另一端点为虚拟目标点, 沿直线前进到虚拟目标点, 并进行步骤 2。

5 仿真和实验

为了验证本文所提方法在面对突发威胁时的有效性和可行性, 在 Matlab 仿真环境下, 利用该方法进行仿真测试。仿真环境为 $300\text{ m} \times 300\text{ m}$ 的区域, 共设置两种突发威胁环境, 第一种是较为简单的一字型威胁, 第二种是凹形陷阱威胁。

鸽群优化算法中相关参数设置为: 种群数为 100, 地图罗盘算子迭代次数为 64, 地标算子迭代次数为 16, 适应度评价权值为 0.5。人工势场中相关参数设置为: 引力增益系数 k_a 为 1, 斥力增益

系数 k_r 为 100, 单个威胁影响的最大距离范围 d_0 为 50 m, 安全距离为 0.5 m。

在仿真测试中, 目标点是事先探测已知的, 故无人机在出发时就已经装载离线初始路径。假设有 3 架无人机飞向 3 个目标点, 3 架无人机的起始坐标分别为 (10, 100) (10, 150) (10, 200), 3 个目标的坐标分别为 (290, 30) (290, 150) (290, 270)。

第一种突发威胁环境, 区域内有 7 个已知威胁, 此外还有 3 个突发威胁, 其位置和威胁区半径如表 1 所示。

表 1 突发威胁区参数

Table 1 Sudden threat zone parameters

威胁区编号	威胁区坐标/m	威胁区半径/m
1	(150, 150)	40
2	(50, 270)	15
3	(200, 60)	20

仿真结果如图 7 所示, 图中菱形为无人机起始点, 五角星为无人机目标点, 三角形为局部动态规划路径的起点与终点, 黑色圆形为已知威胁, 红色圆形为突发威胁, 黑色实线条表示离线初始路径, 蓝色点虚线代表局部动态规划路径。

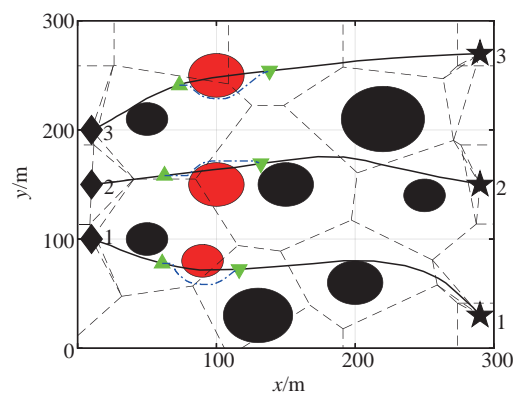


图 7 面对突发威胁的规划结果

Fig. 7 Planning results in the face of sudden threats

在图 7 中, 3 架无人机的离线路径均可避开已知威胁, 但与突发威胁有交叉出现, 局部动态规划路径则可以绕开突发威胁, 并在避开之后重新回到离线初始路径上继续前进, 能够满足局部动态路径规划的安全要求; 本次仿真耗时 0.3 s, 能

够满足局部动态路径规划的实时性要求。

第二种突发威胁环境，区域内有 7 个已知威胁，此外还有一个突发的复杂凹形陷阱威胁。仿真结果如图 8 所示。

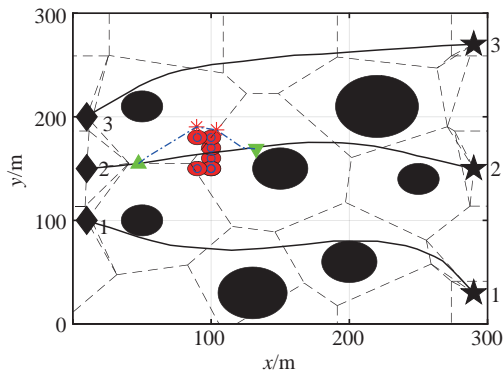


图 8 面对复杂突发威胁的规划结果

Fig. 8 Planning results in the face of complex sudden threats

在图 8 中，可以看到 2 号无人机的离线初始路径与突发的凹形威胁区有交叉部分，而使用本文方法得到的局部动态规划路径可以成功避开凹形威胁区，避免陷入局部最优陷阱，满足无人机在面对复杂突发威胁时的安全需求；本次仿真耗时 0.09 s，进一步显示了本方法具有较好的实时性。

6 结 论

本文对多无人机突发威胁环境下的局部路径规划问题进行了研究，提出了一种基于鸽群优化算法的局部动态路径规划算法，在带有预测距离的虚拟目标点法的基础上融入智能优化算法，可适用于无人机面对突发复杂威胁时的局部动态避障。仿真结果证明，该算法可以避免传统人工势场法容易陷入的局部最优陷阱，且所需时间成本也较小，能够满足局部动态路径规划的安全性和实时性要求。

【参 考 文 献】

[1] 罗强, 王海宝, 崔小劲, 等. 改进人工势场法自主移动机器人路径规划[J]. 控制工程, 2019 (6): 1091-1098.
 [2] Vacherand F, Favre-Reguillon F. Local path planning in certainty grid in esprit II panorama project[J]. IFAC Proceedings Volumes, 1993, 26 (1): 458-463.

[3] Elhalawany B M, Abdel-Kader H M, Tageldeen A, et al. Modified A* algorithm for safer mobile robot navigation [C]. International Conference on Modelling, Cairo, Egypt, 2013.
 [4] Lozano-Perez T, Wesley M A. An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles [J]. Communications of the ACM, 1979, 22 (10): 560-570.
 [5] 王迪, 李彩虹, 郭娜, 等. 改进人工势场法的移动机器人局部路径规划[J]. 山东理工大学学报 (自然科学版), 2021, 35 (3): 1-6.
 [6] 杨萌, 王玥. 基于改进人工势场法的无人机避让航迹规划[J]. 导航与控制, 2019, 18 (1): 76-83.
 [7] 卢恩超, 张邓斓, 宁雅男, 等. 改进人工势场法的机器人路径规划[J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2012 (5): 735-738.
 [8] 罗乾又, 张华, 王姮, 等. 改进人工势场法在机器人路径规划中的应用[J]. 计算机工程与设计, 2011, 32 (4): 1411-1418.
 [9] 梁献霞, 刘朝英, 宋雪玲, 等. 改进人工势场法的移动机器人路径规划研究[J]. 计算机仿真, 2018, 35 (4): 291-294+361.
 [10] Weerakoon T, Ishii K, Nassiraei A A F. An artificial potential field based mobile robot navigation method to prevent from deadlock [J]. Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing Research, 2015, 5 (3): 189-203.
 [11] 徐小强, 王明勇, 冒燕. 基于改进人工势场法的移动机器人路径规划[J]. 计算机应用, 2020, 40 (12): 3508-3512.
 [12] 金飞虎, 洪炳熔, 高庆吉. 基于蚁群算法的自由飞行空间机器人路径规划[J]. 机器人, 2002 (6): 526-529.
 [13] Duan H, Qiao P. Pigeon-inspired optimization: A new swarm intelligence optimizer for air robot path planning [J]. International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics, 2014, 7 (1): 24-37.
 [14] 邱华鑫, 段海滨, 范彦铭. 基于鸽群行为机制的多无人机自主编队[J]. 控制理论与应用, 2015, 32 (10): 1298-1304.
 [15] 余今, 张德贤. 几种仿生优化算法综述[J]. 软件导刊, 2019, 18 (2): 49-51.
 [16] 郭振洲, 王平, 马云峰, 等. 基于自适应权重和柯西变异的鲸鱼优化算法[J]. 微电子学与计算机, 2017, 34 (9): 20-25.
 [17] Khatib O. Real-time obstacle avoidance system for manipulators and mobile robots [J]. The International Journal of Robotics Research, 1986, 5 (1): 90-98.